ННІ «Інститут геології»

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Тетяна МАЛІК

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт

з навчальної дисципліни

«Математична обробка геодезичних вимірювань»

частина 1. Елементи теорії похибок вимірів

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійними програмами «Оцінка землі та нерухомого майна», «Геоінформаційні системи та технології»
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»

Київ 2024

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірювань» частина 1. Елементи теорії похибок вимірів для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Оцінка землі та нерухомого майна», «Геоінформаційні системи та технології» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» / Т. Малік – електронне видання, Київ: ННІ «Інститут геології», 2024. – 32 с.

Автор:
Тетяна МАЛІК, кандидат технічних наук, доцент кафедри геоінформатики

Рецензенти:
Руслан ЯНЧУК, кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри геодезії та картографії Національного університету водного господарства та природокористування
Зоя ВИЖВА, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Рекомендовано до публікації вченою радою ННІ «Інститут геології»
протокол N 2 від 24 вересня 2024 р.

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірювань» частина 1. Елементи теорії похибок вимірів розроблені для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Оцінка землі та нерухомого майна», «Геоінформаційні системи та технології» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій». В методичних рекомендаціях розглянуто основні питання теорії похибок вимірювань: критерії точності вимірювань, середня квадратична похибка функції, математична обробка рядів вимірювань однієї величини. Наведено типові приклади для самостійної підготовки студентів та виконання ними практичних завдань.

Зміст

Вступ

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірювань» частина 1. Елементи теорії похибок вимірів розроблені для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Оцінка землі та нерухомого майна», «Геоінформаційні системи та технології» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій».

В методичних рекомендаціях розглянуто основні питання теорії похибок вимірювань: критерії точності вимірювань, середня квадратична похибка функції, математична обробка рядів вимірювань однієї величини. Наведено типові приклади для самостійної підготовки студентів та виконання ними практичних завдань.

Мета освітньої дисципліни – забезпечення підготовки студентів з математичної теорії похибок, ймовірностей розподілу випадкових величин вимірювань; обробки рядів, функцій виміряних величин; обробка результатів геодезичних вимірювань з метою усунення похибок та визначення найімовірніших значень цих величин, оцінки їх точності.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен знати:

1. Задачі теорії похибок.
2. Критерії точності вимірювань.
3. Похибки заокруглення та їх властивості.
4. Середню квадратичну похибку функції (корельованих та некорельованих аргументів).
5. Основні етапи математичної обробки та контролю точності ряду багатократних незалежних рівноточних та нерівноточних вимірювань однієї величини.
6. Основні етапи математичної обробки та контроль точності ряду подвійних рівноточних та нерівноточних вимірювань ряду однорідних величин.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен вміти:

1. Розв’язувати задачі теорії похибок.
2. Визначати критерії точності вимірювань.
3. Розв’язувати типові приклади з визначення середньої квадратичної похибки функції корельованих і некорельованих аргументів.
4. Виконувати математичну обробку ряду багатократних незалежних рівноточних та нерівноточних вимірювань однієї величини:
5. Виконувати математичну обробку подвійних рівноточних та нерівноточних вимірювань ряду однорідних величин з необхідним контролем обчислень.

Оцінювання здобувачів вищої освіти здійснюється відповідно до «Положення про організацію освітнього процесу у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (друга редакція)» http://nmc.univ.kiev.ua/docs/Polozhennia-pro-organizatsiyu-osvitniogo-procesu-11_04_2022.pdf.

I. **Закономірності результатів та похибок вимірів і їх числові характеристики**

Великий вчений Менделєєв говорив: «Наука розпочинається там, де починають вимірювати».

Короткі теоретичні відомості до виконання практичних робіт 1-3

Розподіл результатів вимірів та їх похибок

В практиці геодезичних вимірів ***істинне*** значення вимірюваної величини в більшості випадків невідомо. Результати вимірів будемо розглядати як випадкову величину X, яка в основному буде ***дискретною*** або ***перервною***.

Розподіл дискретної випадкової величини X зобразимо у вигляді статистичного ряду (табл. 1.1):

Таблиця 1.1

Розподіл дискретної випадкової величини X у вигляді статистичного ряду

X_i	X_1	X_2	…	X_i	…	X_j	…	X_n	
ν	ν_1	ν_2	…	ν_i	…	ν_j	…	ν_n	N
$r(X)$	$r(X_1)$	$r(X_2)$	…	$r(X_i)$	…	$r(X_j)$	…	$r(X_n)$	1

В таблиці 1.1 ν_i – частоти дискретних випадкових величин, $r(X_i)$ – емпірична ймовірність

$$r(X_i)=\frac{\nu_i}{N}; \qquad N=\sum_{i=1}^{n}\nu_i ; \qquad \left(r(X_i)\approx p(X_i)\right),$$

де N – кількість вимірів, $p(X_i)$ – ймовірність.

Для повної групи всіх можливих несумісних результатів вимірів:

$$\sum_{i=1}^{n} r(X_i)=1 .$$

Ймовірність того, що випадкова величина не перевищить наперед заданого значення X_i знаходиться як

$$P\left(X<X_j=\right)\sum_{i=1}^{j-1} p(X_i).$$

Ймовірність попасти випадковій величині в завдані межі знаходиться виразом

$$p\left(X_i \le X \le X_j\right)=p\left(X<X_j\right)-p\left(X>X_i\right).$$

Гістограма розподілу похибок

Для дослідження результатів вимірів та їх похибок результати вимірів розбивають на інтервали з довжиною, яка знаходиться за формулою:

$$Q=\frac{X_{\max}-X_{\min}}{1+3{,}2\lg n}$$

де $X_{\max}$ – найбільший результат вимірів;

$X_{\min}$ – найменший результат вимірів;

n – кількість вимірів.

Значення Q закруглюють до зручного числа в сторону ***зменшення***.

Для наочності розподілу похибок будують ***гістограму*** (рис. 1.1), по осі абсцис відкладають середини інтервалів похибок $\overline{\Delta}_i$, а по осі ординат емпіричні ймовірності

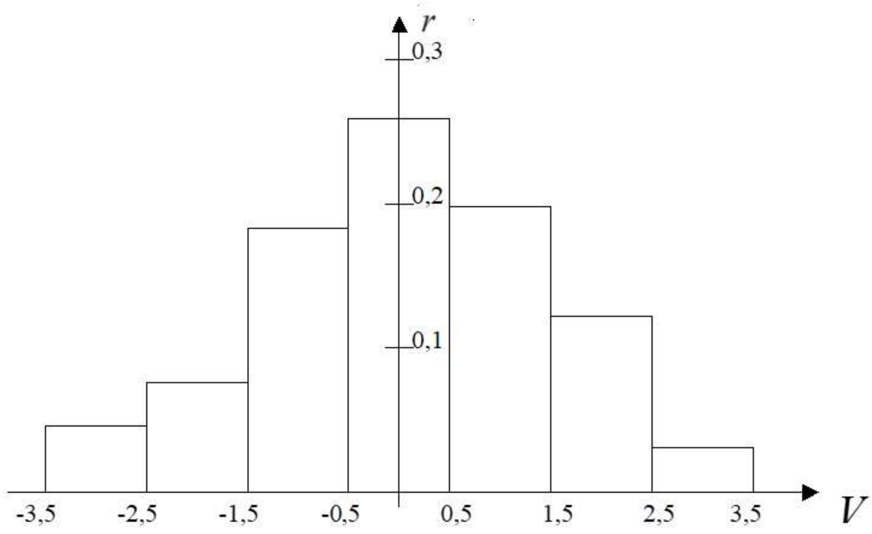

Рис. 1.1. Гістограма

Характеристики розподілу випадкових величин

Для характеристики розподілу випадкових величин користуються функціями розподілу. Розрізняють інтегральну та диференціальну функції розподілу. ***Інтегральну*** називають просто функцією розподілу $F\left(X_j\right)$, котра описує розподіл ймовірностей, тобто

$$F\left(X_j\right) = P\left(X < X_j\right).$$

Емпірична функція розподілу для заданого X_j дорівнює сумі емпіричних ймовірностей для значень менших X_j. Графік цієї функції можна назвати ***східчастим графіком*** (рис. 1.2).

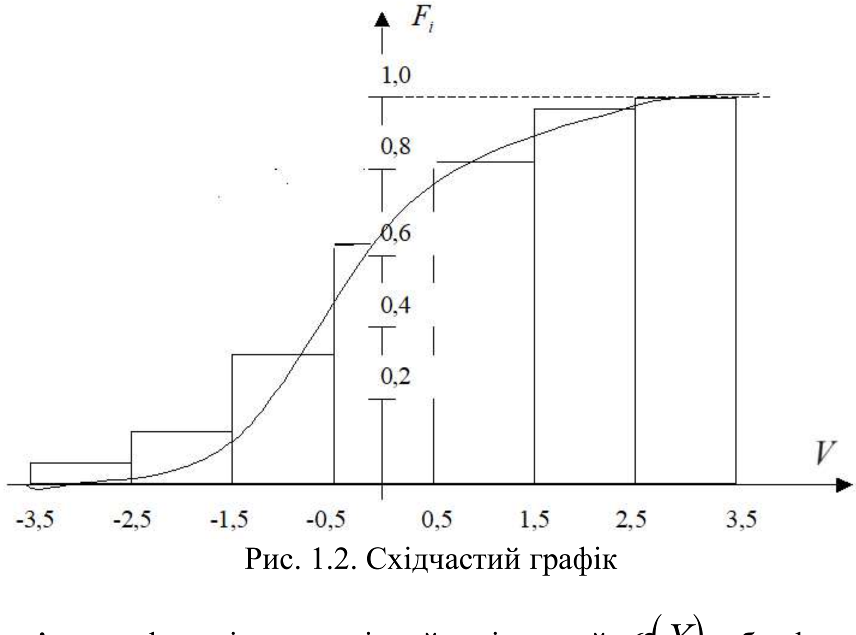

Рис. 1.2. Східчастий графік

Диференціальна функція розподілу ймовірностей $\varphi(X)$ або функція ***щільності*** розподілу ймовірностей показує з якою ймовірністю випадкова величина потрапляє в той чи інший інтервал. Між цими функціями існує залежність:

$$\varphi\left(X_i\right) = F\left(X_i\right).$$

Для безперервних випадкових величин залежність виражається у вигляді:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(X) dx .$$

Центр групування результатів вимірів та їх похибок

Ймовірнішим значенням вимірюваної величини є центр групування результатів. Числовою характеристикою якого є ***математичне сподівання***.

Математичне сподівання $M(x)$ дискретної випадкової величини називається сума добутків всіх можливих значень випадкової величини на відповідні ймовірності. Математичне сподівання характеризує центр розподілу випадкової величини, тобто

- для **перервних** випадкових величин: $M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$;
- для **безперервних** випадкових величин: $M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x) dx$.

Для **рівноточних** вимірів оцінкою математичного сподівання є ***арифметична середина*** або середнє арифметичне значення, яке коливається навколо математичного сподівання, тобто:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Для правильно обчисленої арифметичної середини сума відхилень результатів вимірів від неї дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0, \quad \left(\delta_i = X_i - \bar{X}\right).$$

На відміну від математичного сподівання ***арифметична середина*** – ***випадкова величина***, тобто

$$\bar{X} \approx M(x).$$

Арифметична середина є **емпіричною** числовою характеристикою центра групування. Математичне сподівання є ***генеральною*** серединою й вона є теоретичною числовою характеристикою центра групування.

Емпіричне математичне сподівання (емпірична ймовірність):

$$\tilde{M}(x) = \sum x_i \cdot r(x_i).$$

Властивості математичного сподівання

1. Якщо $c = const$, то $M(c) = c$.
2. Якщо $y = c \cdot x$, то $M(y) = c \cdot M(x)$.
3. Якщо $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$, то $M(y) = \sum_{i=1}^{n} M(x_i)$.
4. Для функції $y = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ будемо мати $M(y) = M(x_1) \cdot M(x_2) \cdot \ldots \cdot M(x_n) = \prod_{i=1}^{n} M(x_i)$.
5. Для спільної похибки $\Delta = \Delta' + \Delta''$ будемо мати $M(\Delta) = M(\Delta') + M(\Delta'') = M(\Delta'') = c$, при цьому $M(\Delta') = 0$, а величина с – залишкова похибка.

Розсіювання результатів та похибок вимірів

Тісноту розсіювання результатів вимірів та їх похибок навколо центра групування характеризує ***дисперсія*** та ***стандарт*** – середнє квадратичне відхилення.

Дисперсією випадкової величини x називається математичне сподівання квадрата відхилення значення випадкової величини від її математичного сподівання, тобто

$$D(x) = M\left[x - M(x)\right]^2.$$

Дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно центра розподілу.

Для дискретної випадкової величини з ймовірностями $p(x_i)$ дисперсія має вигляд:

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\cdot\left[x_i - M(x)\right]^2.$$

Дисперсією можна показати й таким виразом

$$D(x) = M\left(x^2\right) - \left[M(x)\right]^2.$$

Для неперервної випадкової величини дисперсія

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[x - M(x)\right]^2\cdot\varphi(x)\cdot dx,$$

де $\varphi(x)$ – щільність розподілу ймовірностей випадкової величини x.

Властивості дисперсії. Стандарт

1. Якщо $c = const$, то $D(c) = c$.
2. Якщо $y = c + x$, то $D(y) = D(x)$, для функції $y = c\cdot x$, то $D(y) = c^2\cdot D(x)$.
3. Для функції $y = x_1 + x_2$ будемо мати $D(y) = D(x_1) + D(x_2)$.
4. Для функції $y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ дисперсія $D(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2\cdot D(x_i)$.

Величина $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$ називається ***стандартом***, стандартним відхиленням або стандартною похибкою. Стандарт величина **позитивна** (плюсова) та постійна для визначених умов.

Дисперсія арифметичної середини

Середнє арифметичне значення випадкових величин x_i визначається за формулою:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \ldots + \frac{1}{n}x_n,$$

тоді дисперсія $D\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} D(x_i)$.

Якщо $D(x_1) = D(x_2) = \ldots = D(x_n) = D(x)$, тоді $D\left(\overline{X}\right) = \frac{n\cdot D(x)}{n^2} = \frac{D(x)}{n}$.

Стандарт арифметичної середини визначається як

$$\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}.$$

Величина m^2 називається **емпіричною дисперсією**, а m – **емпіричним стандартом** або **середньою квадратичною похибкою**.

Незміщена оцінка дисперсії

Позначимо $x_i - M(x) = \Delta$ – **істинна похибка**. При кількості n випадкової величини x_i ймовірностями будуть $\frac{1}{n}$, тоді

$$\tilde{D}(x) = m_\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)[x_i - M(x)]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 .$$

Позначимо відхилення $\delta_i = x_i - \overline{X}$, тоді

$$m_\delta^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a + a - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - a) - \left(\overline{X} - a\right)\right]^2 ,$$

де $a = M(x)$ – **істинне** значення вимірюваної величини.

Математичне сподівання дисперсії m_δ^2 визначається як

$$M\left(m_\delta^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[M\left(x_i - a\right)^2 - M\left(\overline{X} - a\right)^2\right].$$

<u>Окремі математичні сподівання:</u>

$$M\left(x_i - a\right)^2 = M\left[x_i - M(x)\right]^2 = D(x) = \sigma^2(x);$$

$$M\left(\overline{X} - a\right)^2 = M\left[\overline{X} - M(x)\right]^2 = D\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2(x)}{n}.$$

Тоді

$$M\left(m_\delta^2\right) = \sigma^2(x) - \frac{\sigma^2(x)}{n} = \frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2(x).$$

Отже емпірична дисперсія m_δ^2 від'ємно зміщена. Для отримання незміщеної оцінки потрібно прийняти величину дисперсії $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$ помножити на коефіцієнт обернений коефіцієнту зміщення, тобто незміщена оцінка емпіричної дисперсії буде такою

$$m_\delta^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 .$$

Отримана формула називається ***формулою Бесселя***. При цьому істинна величина вимірюваної величини невідома, тобто $M(x) = a$ – невідомо, є тільки середнє арифметичне значення $\overline{X}$. Відхилення $\delta_i = x_i - \overline{X}$.

Якщо відоме математичне сподівання $M(x) = a$, тоді відхилення $\Delta_i = x_i - a$ то емпірична дисперсія обчислюється за формулою Гавсса:

$$m_\Delta^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2$$

Похибка арифметичної середини знаходиться як

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Центральні моменти

Центральним моментом r -го порядку випадкової величини називається вираз

$$\mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 .$$

Якщо $r = 2$, то отримаємо **емпіричну дисперсію**

$$\mu_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$$

Центральні моменти третього та четвертого порядків знаходимо за формулами:

$$\mu_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^3 , \qquad \mu_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^4 .$$

Перед виконанням практичних робіт 1-3 необхідно обов'язково ознайомитися з наведеним вище теоретичним матеріалом.

Практична робота 1. Визначення довжини компаратора за результатами вимірів світловіддалеміром.

Приклад розв'язання нульового варіанту. При вимірюванні довжини польового компаратора високоточним світловіддалеміром одержані 50 результатів вимірів, у які введені поправки за температуру, тиск та вологість.

Довжина компаратора дорівнюватиме 700,1*м* (700100*мм*) плюс середньоарифметичне значення з 50-ти одержаних величин – x_i, виражених в *мм* і занесених в таблицю 1.2.

Таблиця 1.2

Виміряні значення довжини компаратора

№ п/п	x_i, *мм*	$\delta_i = x_i - \bar{x}$	№ п/п	x_i, *мм*	$\delta_i = x_i - \bar{x}$	№ п/п	x_i, *мм*	$\delta_i = x_i - \bar{x}$	№ п/п	x_i, *мм*	$\delta_i = x_i - \bar{x}$	№ п/п	x_i, *мм*	$\delta_i = x_i - \bar{x}$
1	2,2	0,0	11	1,6	-0,6	21	3,1	+0,9	31	2,7	+0,5	41	2,2	0,0
2	1,6	-0,6	12	2,7	+0,5	22	3,4	+1,2	32	1,8	-0,4	42	2,4	+0,2
3	3,0	+0,8	13	1,8	-0,4	23	2,5	+0,3	33	2,2	0,0	43	1,9	-0,3
4	2,8	+0,6	14	2,1	-0,1	24	1,4	-0,8	34	2,8	+0,6	44	2,5	+0,3
5	1,3	-0,9	15	2,1	-0,1	25	2,8	+0,6	35	2,0	-0,2	45	2,2	0,0
6	2,4	+0,2	16	2,5	+0,3	26	1,7	-0,5	36	2,4	+0,2	46	2,2	0,0
7	1,9	-0,3	17	1,9	-0,3	27	2,0	-0,2	37	2,3	+0,1	47	2,1	-0,1
8	2,4	+0,2	18	1,3	-0,9	28	2,2	0,0	38	2,1	-0,1	48	2,3	+0,1
9	3,0	+0,8	19	1,5	-0,7	29	2,5	+0,3	39	1,8	-0,4	49	2,1	-0,1
10	1,1	-1,1	20	2,9	+0,7	30	1,5	-0,7	40	2,6	+0,4	50	2,2	0,0

Для нульового варіанту отримаємо:

сума значень довжини компаратору $\sum_1^{50} x_i = 110{,}0$ мм;

середньоарифметичне значення $\bar{x} = \sum_1^n x_i/n$, де n – кількість виміряних значень довжини компаратору, $\bar{x} = \frac{110}{50} = 2{,}2$*мм*;

$\delta_i = x_i - \bar{x}$ – відхилення від середнього, $\sum_{i=1}^{50}\delta_i = 0{,}0$ – така сума $\sum\delta_i$ може відрізнятись від нуля на величину до $\pm 0{,}5$ від заокруглення.

Отже, для нульового варіанту довжина компаратора буде дорівнювати 700,1022 *м*.

Завдання до виконання практичної роботи 1. Визначити довжину компаратора як наведено в прикладі розв'язання нульового варіанту.

Для виконання практичної роботи кожному студенту необхідно розрахувати вихідні дані за відповідним варіантом. **В залежності від *N* – номера студента за списком в журналі (або викладач варіант видає індивідуально), змінюються лише два значення вимірюваної величини x_i з таблиці 1.2.** Зразок розрахунку вихідних даних за варіантом наведено в таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

Зразок розрахунку вихідних даних за варіантом

Варіант	Вимірювання x_i
N	**перше значення** $x_{N табл}+0{,}1$ *мм* **друге значення** $x_{(N+10) табл}–0{,}1$ *мм*
наприклад	
15	**перше значення** $x_{15}=x_{15 табл}+0{,}1=2{,}1+0{,}1=2{,}2$ *мм* **друге значення** $x_{25}=x_{(15+10)\ табл}–0{,}1=x_{25 табл}-0{,}1=2{,}8-0{,}1=2{,}7$ *мм*
29	**перше значення** $x_{29}=x_{29 табл}+0{,}1=2{,}5+0{,}1=2{,}6$ *мм* **друге значення** $x_{39}=x_{(29+10)\ табл}–0{,}1=x_{39 табл}-0{,}1=1{,}8-0{,}1=1{,}7$ *мм*

Практична робота 2. Побудова гістограми, полігональної кривої та східчастого графіка емпіричної функції розподілу похибок.

Приклад розв'язання нульового варіанту. Для побудови гістограми потрібно знайти довжину інтервалу по осі абсцис, на якому потрібно показати кількість, тобто відповідну частоту появи похибок. Ця частота зображується у вигляді прямокутників по осі ординат. Вихідні дані для розрахунків взяті з практичної роботи 1.

Довжина інтервалу обчислюється за формулою Стерджесса

$$Q_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}2 \cdot \lg n},$$

де: x_{max} – найбільше значення із виміряних величин;

x_{min} – найменше значення із виміряних величин.

Кількість інтервалів розраховується за формулою:

$$k = 1 + 3{,}2 \cdot \lg n,$$

n – кількість виміряних величин.

Підставляючи необхідні значення в дану формулу, для нульового варіанту будемо мати:

$$Q_x = \frac{3{,}4 - 1{,}1}{1 + 3{,}2 \cdot 1{,}699} = 0{,}357 \approx 0{,}3\text{мм}.$$

Отримане значення Q_x=0,357 потрібно закруглити в сторону **зменшення**, тобто прийняти довжину інтервалу Q_x=0,3*мм*.

Згідно даних таблиці 2 та розрахунку довжини інтервалу похибок складається таблиця інтервалів, середини інтервалів, емпіричних ймовірностей та накопичених частостей або емпіричних функцій розподілу похибок $f\left(\bar{\delta}_i\right)$, в таблиці 1.4 наведено приклад для нульового варіанту.

Таблиця 1.4

Таблиця інтервалів, середини інтервалів емпіричних ймовірностей та накопичених частостей або емпіричних функцій розподілу похибок $f\left(\bar{\delta}_i\right)$

№ інтервалу	Інтервали, *мм*		Середина інтервалу $\bar{\delta}_i$	Частоти ν_i	Емпіричні	
	від	до			ймовірності $p\left(\bar{\delta}_i\right)$	функції розподілу або частості $f\left(\bar{\delta}_i\right)$
1	-1,45	-1,05	-1,2	1	0,02	0,00
2	-1,05	-0,75	-0,9	3	0,06	0,02
3	-0,75	-0,45	-0,6	5	0,10	0,08
4	-0,45	-0,15	-0,3	8	0,16	0,18
5	-0,15	+0,15	0	14	0,28	0,34
6	+0,15	+0,45	+0,3	9	0,18	0,62
7	+0,45	+0,75	+0,6	6	0,12	0,80
8	+0,75	+1,05	+0,9	3	0,06	0,92
9	1,05	+1,45	+1,2	1	0,02	0,98
				50	1,00	

Гістограму та полігональну криву будують у вигляді прямокутників, використовуючи кінці інтервалів та їх середини, тобто по вертикалі відкладають емпіричні ймовірності $p\left(\bar{\delta}_i\right)$ (табл. 1.4) у відповідному масштабі.

Наприклад, в інтервал (-0,75; -0,45) попадають п'ять наступних похибок: -0,6; -0,6; -0,7; -0,5; -0,7 (табл. 1.4). Емпірична ймовірність дорівнює 5:50=0,10 і відповідний прямокутник має середину інтервалу (-0,6) – рис. 1.3.

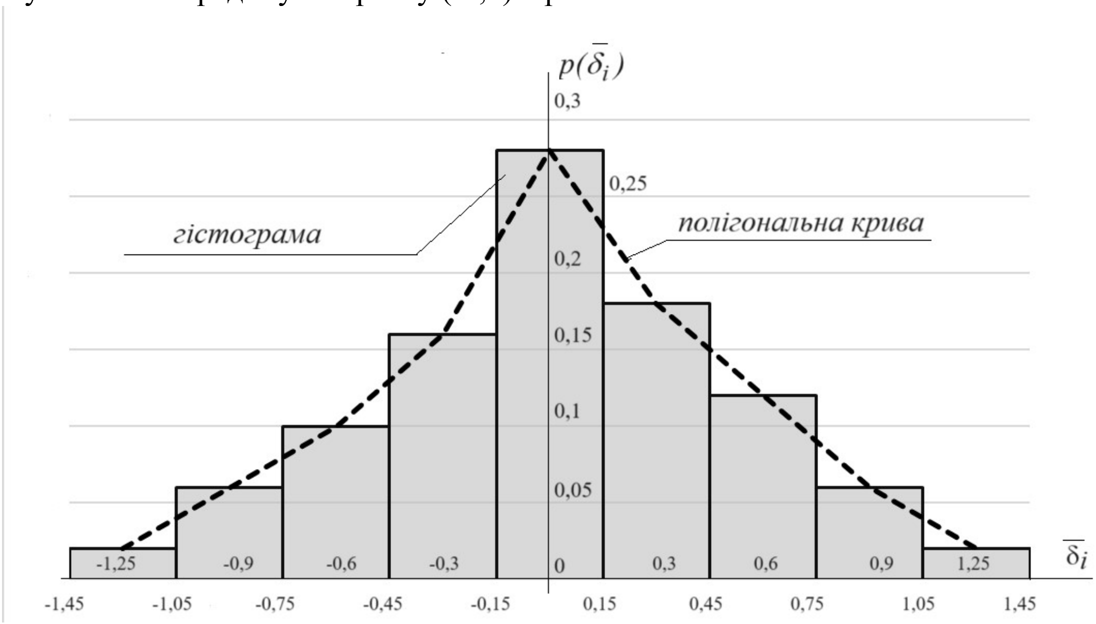

Рис. 1.3. Гістограма. Полігональна крива

Функція розподілу $F(x_j)$ визначається ймовірністю того, що випадкова величина *x* прийме значення, яке менше наперед заданого дійсного числа x_j, тобто

$$P(x_j) = P(x < x_j).$$

Для **дискретних випадкових величин** вона обчислюється за формулою

$$P(x < x_j) = \sum_{i=1}^{j-1} P(x_i).$$

Емпіричні функції розподілу $f\left(\overline{\delta_i}\right)$ обчислені в останньому стовпці табл. 1.4. Вони представляють собою накопичені частості і відносяться до середин інтервалів. **Східчастий графік** такої функції побудований на рис. 1.4.

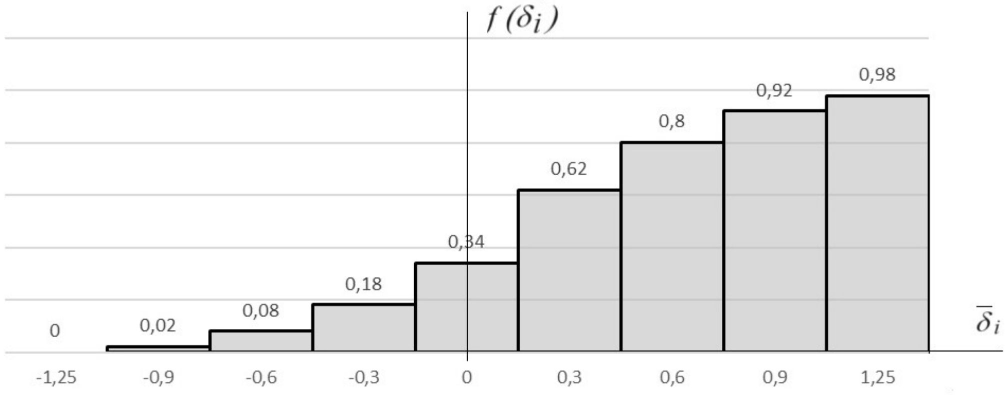

Рис. 1.4. Східчастий графік

Завдання до виконання практичної роботи 2. За індивідуальними вихідними даними практичної роботи 1 виконати побудову гістограми, полігональної кривої та східчастого графіка емпіричної функції розподілу похибок так як наведено в прикладі розв'язання нульового варіанту.

Практична робота 3. Обчислення центральних моментів, оцінка точності світловіддалемірних вимірювань, знаходження асиметрії та ексцесу за їх результатами.

Приклад розв'язання нульового варіанту. Для визначення центральних моментів потрібно скласти таблиця значень $\delta_i, \delta_i^2, \delta_i^3, \delta_i^4$ (табл. 1.5). Для цього значення відхилень від середнього δ_i вибираються з таблиці 1.2 з практичної роботи 1 і заносяться в таблицю 1.5.

Центральний момент першого порядку обчислюють за формулою

$$\mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i \,,$$

де *n* - кількість виміряних величин,

але як видно з таблиця 1.2 для нульового варіанту сума відхилень від середнього $\sum_{i=1}^{50}\delta_i = 0{,}00$

, тому центральний момент першого порядку $\underline{\underline{\mu_1 = 0}}$.

Центральний момент другого порядку або емпірична дисперсія визначається як

$$\mu_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2,$$

де $\delta_i = x_i - \bar{x}$ – відхилення від середнього, де *n* - кількість виміряних величин.

Центральний момент другого порядку або **емпірична дисперсія** для нульового варіанту дорівнюватиме

$$\mu_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = \frac{1}{50}\cdot\sum_{i=1}^{50}\delta_i^2 = \frac{1}{50}\left(5{,}16 + 6{,}77 + 0{,}67\right) = \underline{\underline{0{,}252}}.$$

Середня квадратична похибка одного світловіддалемірного виміру визначається за формулою

$$m = \sqrt{\mu_2},$$

де μ_2 – центральний момент другого порядку.

Середня квадратична похибка одного світловіддалемірного виміру для нульового варіанту складе

$$m = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{0{,}252} = 0{,}5\text{мм}.$$

Таблиця 1.5

Таблиця значень $\delta_i, \delta_i^2, \delta_i^3, \delta_i^4$ (Зразок оформлення даних практичних робіт 1, 3)

№ п/п	x_i, мм	$\delta_i = x_i - \bar{x}$	δ^2	δ^3	δ^4	δi за зрос-танням	Інтервал	Частота
1	2,2	0	0,0000	0,0000	0,0000	-1,1		1
2	1,6	-0,6	0,3600	-0,2160	0,1296	-0,9	-1,05	
3	3	0,8	0,6400	0,5120	0,4096	-0,9		3
4	2,8	0,6	0,3600	0,2160	0,1296	-0,8	-0,75	
5	1,3	-0,9	0,8100	-0,7290	0,6561	-0,7	-0,75	
6	2,4	0,2	0,0400	0,0080	0,0016	-0,7		
7	1,9	-0,3	0,0900	-0,0270	0,0081	-0,6		5
8	2,4	0,2	0,0400	0,0080	0,0016	-0,6		
9	3	0,8	0,6400	0,5120	0,4096	-0,5	-0,45	
10	1,1	-1,1	1,2100	-1,3310	1,4641	-0,4	-0,45	
11	1,6	-0,6	0,3600	-0,2160	0,1296	-0,4		
12	2,7	0,5	0,2500	0,1250	0,0625	-0,4		
13	1,8	-0,4	0,1600	-0,0640	0,0256	-0,3		
14	2,1	-0,1	0,0100	-0,0010	0,0001	-0,3		8
15	2,1	-0,1	0,0100	-0,0010	0,0001	-0,3		
16	2,5	0,3	0,0900	0,0270	0,0081	-0,2		
17	1,9	-0,3	0,0900	-0,0270	0,0081	-0,2	-0,15	
18	1,3	-0,9	0,8100	-0,7290	0,6561	-0,1	-0,15	
19	1,5	-0,7	0,4900	-0,3430	0,2401	-0,1		
20	2,9	0,7	0,4900	0,3430	0,2401	-0,1		
21	3,1	0,9	0,8100	0,7290	0,6561	-0,1		
22	3,4	1,2	1,4400	1,7280	2,0736	-0,1		
23	2,5	0,3	0,0900	0,0270	0,0081	0		
24	1,4	-0,8	0,6400	-0,5120	0,4096	0		
25	2,8	0,6	0,3600	0,2160	0,1296	0		14
26	1,7	-0,5	0,2500	-0,1250	0,0625	0		
27	2	-0,2	0,0400	-0,0080	0,0016	0		
28	2,2	0	0,0000	0,0000	0,0000	0		
29	2,5	0,3	0,0900	0,0270	0,0081	0		
30	1,5	-0,7	0,4900	-0,3430	0,2401	0,1		
31	2,7	0,5	0,2500	0,1250	0,0625	0,1	0,15	
32	1,8	-0,4	0,1600	-0,0640	0,0256	0,2	0,15	
33	2,2	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,2		
34	2,8	0,6	0,3600	0,2160	0,1296	0,2		
35	2	-0,2	0,0400	-0,0080	0,0016	0,2		
36	2,4	0,2	0,0400	0,0080	0,0016	0,3		9
37	2,3	0,1	0,0100	0,0010	0,0001	0,3		
38	2,1	-0,1	0,0100	-0,0010	0,0001	0,3		
39	1,8	-0,4	0,1600	-0,0640	0,0256	0,3		
40	2,6	0,4	0,1600	0,0640	0,0256	0,4	0,45	
41	2,2	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,5	0,15	
42	2,4	0,2	0,0400	0,0080	0,0016	0,5		
43	1,9	-0,3	0,0900	-0,0270	0,0081	0,6		
44	2,5	0,3	0,0900	0,0270	0,0081	0,6		6
45	2,2	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,6		
46	2,2	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,7	0,75	
47	2,1	-0,1	0,0100	-0,0010	0,0001	0,8	0,75	
48	2,3	0,1	0,0100	0,0010	0,0001	0,8		3
49	2,1	-0,1	0,0100	-0,0010	0,0001	0,9	1,05	
50	2,2	0	0,0000	0,0000	0,0000	1,2		1
Σі=	110,0000	0,0000	12,6000	0,0900	8,4600			
сер X	2,2	мм						

Середня квадратична похибка простої арифметичної середини, або кінцевого результату вимірюваної довжини компаратора 700,1022*м* визначається:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}},$$

де m – середня квадратична похибка одного світловіддалемірного виміру, n – кількість виміряних величин.

Середня квадратична похибка простої арифметичної середини, або **кінцевого результату** вимірюваної довжини компаратора 700,1022*м* для нульового варіанту дорівнює

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{50}} = 0{,}071 мм.$$

Результати середньої квадратичної похибки одного світловіддалемірного виміру m та середньої квадратичної похибки кінцевого результату вимірюваної величини M, які знайдені за величиною центрального моменту другого порядку, і є **оцінкою точності світловіддалемірних вимірювань**.

Центральні моменти третього та четвертого порядків визначаються за формулами

$$\mu_3 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \delta_i^3,$$
$$\mu_4 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \delta_i^4.$$

Для нульового варіанту: $\mu_3 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \delta_i^3 = \frac{1}{50}(-1{,}204 + 1{,}287 + 0{,}007) = \frac{0{,}09}{50} = \underline{0{,}0018}$,

$\mu_4 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \delta_i^4 = \frac{1}{50}(3{,}4440 + 4{,}9433 + 0{,}0727) = \frac{8{,}46}{50} = \underline{0{,}1692}$.

Нарешті, потрібно знайти значення асиметрії та ексцесу і **зробити висновок** відносно нормальності розподілу світловіддалемірних вимірювань та їх похибок. Для цього будуть використані значення центральних моментів третього та четвертого порядків.

Більшість похибок геодезичних вимірів мають нормальний розподіл.

Відхилення від нормального розподілу частіше всього свідчать про наявність в результатах вимірів **систематичних похибок.** Для визначення таких відхилень використовують асиметрію $S(x)$ та ексцес $E(x)$, які визначаються за формулами

$$S(x) = \frac{\mu_3}{m^3} \text{ та } E(x) = \frac{\mu_4}{m^4} - 3.$$

Асиметрія використовується для оцінки **симетричності розподілу**. Якщо розподіл **симетричний та нормальний,** то **асиметрія** $S(x)$**=0**. **Ексцес** характеризує **гостроверхість** кривої розподілу (рис 1). Якщо розподіл нормальний, то $\frac{\mu_4}{m^4} = 3$ та **ексцес** $E(x)$=0.

Отже, **асиметрія** та **ексцес** дорівнюватимуть

$$S(x) = \frac{\mu_3}{m^3},$$
$$E(x) = \frac{\mu_4}{m^4} - 3.$$

де μ_3, μ_4 – центральні моменти третього та четвертого порядків, m - середня квадратична похибка одного світловіддалемірного виміру.

Асиметрія та ексцес для нульового варіанту дорівнюватимуть

$$S(x) = \frac{\mu_3}{m^3} = \frac{0{,}0018}{0{,}5^3} = \frac{0{,}0018}{0{,}125} = \underline{\underline{0{,}0144}},$$

$$E(x) = \frac{\mu_4}{m^4} - 3 = \frac{0{,}1692}{0{,}5^4} - 3 = \frac{0{,}1692}{0{,}0625} - 3 = 2{,}707 - 3{,}000 = \underline{\underline{-0{,}293}}.$$

Похибки асиметрії та ексцесу визначаються за формулами

$$m_S \approx \sqrt{\frac{6}{n}}; \qquad m_E \approx \sqrt{\frac{24}{n}},$$

де n – кількість вимірювань.

Похибки асиметрії та ексцесу для нульового варіанту:

$$m_S \approx \sqrt{\frac{6}{n}} \approx \sqrt{\frac{6}{50}} = 0{,}346; \qquad m_E \approx \sqrt{\frac{24}{n}} \approx \sqrt{\frac{24}{50}} = 0{,}693$$

Оскільки вибіркові асиметрія та ексцес є випадковими величинами, то навіть для нормального розподілу вони можуть відрізнятися від нуля. Їх можна рахувати суттєвими, якщо

$$|S(x)| > 3 \cdot m_S,$$
$$|E(x)| > 5 \cdot m_E.$$

У випадку нульового варіанту

$$|S(x)| = 0{,}0144 < 3 \cdot 0{,}346 = 1{,}038,$$
$$|E(x)| = 0{,}293 < 5 \cdot 0{,}693 = 3{,}465.$$

Висновок.

Оскільки асиметрія та ексцес значно менше допустимих, тому немає сумнівів рахувати, що вимірювання та їх похибки не суперечать нормальному розподілу. Це означає, що оцінка точності вимірювань виконана правильно за приведеними формулами середньої квадратичної похибки одного виміру *m=0,5 мм* та середньої квадратичної похибки кінцевого результату *M*=0,071 *мм*, які відповідають нормальному розподілу.

Можна побудувати довірчий інтервал для істинного значення a вимірюваної довжини компаратора у вигляді:

$$\bar{x} - Z_q \cdot M \le a \le \bar{x} + Z_q \cdot M$$

Для довірчої ймовірності *p*=0,95 при нормальному розподілі коефіцієнт Z_q=1,96 (Додаток А). Тоді для **середньої арифметичної величини** $\bar{x}$=700,1022 та **похибки арифметичної середини** *M*=0,071*мм* **довірчим інтервалом** буде

700102,2*мм*-1,96 ·0,071*мм* $\le a \le$ 700102,2*мм*+1,96 ·0,071*мм*,

або 700102,2-0,14 $\le a \le$ 700102,2+0,14,

700102,06*мм* $\le a \le$ **700102,34*мм*.**

Істинне значення *а* коливається в інтервалі

102,34*мм*-102,06*мм*=0,28 ≈ 0,3*мм*

Можна стверджувати, що це значно вузький інтервал, тому кінцевий результат довжини компаратора є достатньо точним.

Завдання до виконання практичної роботи 3. За вихідними даними практичної роботи 1 обчислити центральні моменти, виконати в повному обсязі оцінку точності світловіддалемірних вимірювань так як наведено в прикладі розв'язання нульового варіанту, знайти значення асиметрії та ексцесу, зробити висновок відносно нормальності розподілу світловіддалемірних вимірювань та їх похибок, побудувати довірчі інтервали для істинного значення довжин компаратора.

Практична робота 4. Визначення коефіцієнта кореляції.

Короткі теоретичні відомості.

Поняття про функціональний та стохастичний зв'язок. Коефіцієнт кореляції

Задана функція $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Якщо величина y цілком визначена значеннями x_i, тобто визначена однозначно декількома аргументами, то таку залежність називають ***функціональною***.

Якщо ж одна з випадкових величин реагує на зміну другої зміненням свого закону розподілу, то такий зв'язок називають ***стохастичним*** або ***ймовірнісним***.

На практиці геодезичних вимірів при вивченні стохастичних зв'язків необхідно вирішити два питання: яка **сила** зв'язує та яка **форма** зв'язку.

Сила або тіснота зв'язку визначається коефіцієнтом кореляції. Для двох рядів вимірів

$$\left.\begin{matrix} x_1, x_2, ..., x_n \\ y_1, y_2, ..., y_n \end{matrix}\right\}$$

коефіцієнт кореляції визначається за формулою

$$r = \frac{\mu(x, y)}{m_x m_y},$$

де $\mu(x, y)$ – змішаний центральний момент другого порядку, який визначається за формулою

$$\mu(x, y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\delta_x\delta_y .$$

Таким чином **коефіцієнт кореляції** дорівнює

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_x\delta_y}{(n-1)m_x m_y}$$

Додатній коефіцієнт кореляції

$$r = 1 - \frac{2}{\pi} arctg\frac{1 - k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

де

$$k_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i)\delta(y_i)}{\sum_{i=1}^{n}\delta^2(x_i)}; \qquad k_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i)\delta(y_i)}{\sum_{i=1}^{n}\delta^2(y_i)}.$$

Якщо (-1), то коефіцієнт кореляції **від'ємний**.

Точність визначення **коефіцієнта кореляції** визначається виразом

$$\sigma_r \approx \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}.$$

Коефіцієнт може бути в межах $-1 \le r \le +1$.

Якщо випадкові величини x та y – незалежні, то $r = 0$. У випадку, коли $|r| = 1$, тоді існує лінійний функціональний зв'язок.

Оцінка точності функцій виміряних величин

Для функції **двох** змінних $y = f(x, y)$ **середня квадратична похибка функції** визначається за формулою:

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + 2r_{xy}m_x m_y\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0}.$$

Для функції **трьох** змінних $y = f(x, y, z)$ **середня квадратична похибка функції** виміряних величин дорівнює:

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0^2 m_z^2 + 2r_{xy} m_x m_y \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + 2r_{xz} m_x m_z \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 + +2r_{yz} m_y m_z \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0}$$

Для незалежних результатів вимірів, коли $r_{ij} = 0$, середня квадратична похибка функції виміряних величин по n аргументах дорівнює

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)_0^2 m_{y_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_{x_n}^2}\ .$$

<u>**Приклад:**</u> $\Delta x = S \cdot \cos\alpha$. Позначимо $f = S \cdot \cos\alpha$. Задані m_S, m''_α. Визначити m_f.

$$m_f = \sqrt{\cos^2\alpha \cdot m_S^2 + (-\sin\alpha \cdot S)^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}} = \sqrt{\cos^2\alpha \cdot m_S^2 + S^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}}\ .$$

Вага функції виміряних величин

Задана функція $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Потрібно визначити вагу цієї функції за відомими вагами p_i аргументів x_i. Для цього розділимо дисперсію виміряних величин на величину m_0^2, тоді:

$$\frac{m_y^2}{m_0^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 \cdot \frac{m_{x_1}^2}{m_0^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 \cdot \frac{m_{x_2}^2}{m_0^2} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 \cdot \frac{m_{x_n}^2}{m_0^2}\ .$$

Враховуючи, що $m_{x_i} = \dfrac{m_0}{\sqrt{p_{x_i}}}$ та $p_{x_i} = \dfrac{m_0^2}{m_{x_i}^2}$ маємо:

$$\frac{1}{p_y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_{x_1}} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_{x_2}} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_{x_n}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_{x_i}}$$

Величина $\dfrac{1}{p_{x_i}} = q_{x_i}$ називається оберненою вагою, тоді **обернена вага функції** виміряних величин буде

$$q_y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot q_{x_i}$$

Розрахунок точності вимірів

При розрахунку точності вимірів аргументів x_i висувається умова, щоб похибка функції не перевищувала наперед заданої допустимої величини $w_{доп}$. Тоді розрахунок точності вимірів зводиться до пошуку **середньої квадратичної похибки функції** m_y, котра задовольняла би нерівності

$$w_{доп} \geq Z_q m_y\ .$$

Величина Z_q обирається з таблиці нормального розподілу по довірчий ймовірності $p = 1 - q$. Таку нерівність покажемо в такому вигляді

$$\frac{w_{доп}^2}{Z_q^2} \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0^2 m_{x_i}^2 .$$

В даному випадку потрібно розуміти, що змінні x_i попарно некорельовані між собою.

Величини m_{x_i} підбирають на основі досвіду або точностних характеристик приладів. Якщо порушується нерівність, то корегують окремі m_{x_i} в межах реальних можливостей. За рахунок більш доцільного збільшення даних похибок при можливому зменшені других.

Приклад: Визначити з якою точністю потрібно виміряти вертикальний кут та горизонтальну віддаль при вимірі висоти труби з точністю 5 см, яка визначається за формулою

$$h = S \cdot tg\alpha .$$

Задані величини: $\alpha = 20^0$, $S = 300$ *м*, $m_\alpha = 3''$, $m_S = 0{,}10$ *м*. Знаходимо середню квадратичну похибку функції

$$m_h^2 = tg_\alpha^2 \cdot m_S^2 + \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)^2 \cdot S^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} .$$

За умовою допустиме значення $w_{доп} = 5$ *см*, $p = 0{,}95$. $Z_q = 2$.

$$m_h = \sqrt{0{,}364^2 \cdot 100 + \left(\frac{1}{0{,}883} \right)^2 \cdot 30000^2 \cdot \frac{9}{206265^2}} = \sqrt{13{,}25 + 0{,}244} = 3{,}7 \text{ см}.$$

$$\frac{w_{доп}}{Z_q} \geq m_h ; \qquad \frac{w_{доп}}{Z_q} \geq \frac{5см}{2} = 2{,}5см < 3{,}5см .$$

Як бачимо умова не виконується. Встановлюємо $m_S = 5см$. Тоді $m_h = 2{,}0см$.

Знаходимо $\frac{w_{доп}}{2} = 2{,}5см > 2{,}0$.

Таким чином віддаль потрібно вимірювати з точністю 5 *см*, кут з точністю $3''$, тоді досягнемо потрібної точності 5 *см* у визначенні висоти труби.

Розглянемо розв'язок **практичної роботи 4** для нульового варіанту. У практиці геодезичних вимірювань дуже часто мають справу з поняттям функціональної залежності, яка полягає в тому, що будь-яка фізична величина визначається як однозначна функція однієї або декількох величин (аргументів).

Функціональний зв'язок може існувати і між випадковими величинами, який називають ***ймовірнісним*** або ***стохастичним***. Серед різних видів ймовірнісного зв'язку провідне місце відводиться ***кореляційному*** зв'язку, який використовується для оцінки точності функції виміряних величин.

Для виявлення кореляційного зв'язку знаходиться ***коефіцієнт кореляції***, який можна обчислити за традиційною формулою

$$r_O = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta(x_i) \cdot \delta(y_i)}{(n-1) \cdot m(x) \cdot m(y)},$$

де $\delta(x_i)$ та $\delta(y_i)$ – відхилення від середньоарифметичних значень двох рядів вимірювань x_i та y_i, тобто

$\delta(x_i) = x_i - \bar{x}$, $\delta(y_i) = y_i - \bar{y}$.

Буде представлено приклад обчислення коефіцієнта кореляції, в таблиці 6, у якій розміщені лише відхилення без результатів вимірювань.

Таблиця 6

Значення відхилень без результатів вимірювань

№№ вимірів	$\delta(x_i)$	$\delta^2(x_i)$	$\delta(y_i)$	$\delta^2(y_i)$	№№ вимірів	$\delta(x_i)$	$\delta^2(x_i)$	$\delta(y_i)$	$\delta^2(y_i)$
1	-2,18	4,7524	+0,57	0,3249	7	-0,48	0,2304	-1,13	1,2769
2	-2,38	5,6644	-2,03	4,1209	8	-0,98	0,9604	-1,03	1,0609
3	+0,62	0,3844	+1,17	1,3689	9	+2,32	5,3824	+0,77	0,5929
4	-0,38	0,1444	+0,07	0,0049	10	+0,42	0,1764	-0,23	0,0529
5	+0,82	0,6724	+2,07	4,2849	11	+2,32	5,3824	+1,97	3,8809
6	0,02	0,0004	-1,63	2,6569	12	-0,08	0,0064	-0,53	0,2809
Σ	-3,48	11,6184	+0,22	12,7614	Σ	+3,52	12,1384	-0,18	7,1454

$$\sum_{i=1}^{12}\delta(x_i) = -3{,}48 + 3{,}52 = 0{,}04; \quad \sum_{i=1}^{12}\delta(y_i) = +0{,}22 - 0{,}18 = 0{,}04;$$

$$\sum_{i=1}^{12}\delta^2(x_i) = 11{,}6184 + 12{,}1384 = 23{,}7568;$$

$$\sum_{i=1}^{12}\delta^2(y_i) = 12{,}7614 + 7{,}1454 = 19{,}9068; \quad \sum_{i=1}^{12}\delta(x_i)\cdot\delta(y_i) = 13{,}8068$$

Суми значень $\Sigma\delta(x_i)$ та $\Sigma\delta(y_i)$ повинні бути близькими до нулю.

Середні квадратичні похибки двох рядів вимірювань обчислюють за формулами

$$m(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}\delta^2(x_i)}{n-1}}; \; m(y_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}\delta^2(y_i)}{n-1}}.$$

Для нульового варіанту середні квадратичні похибки двох рядів вимірювань дорівнюватимуть

$$m(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}\delta^2(x_i)}{n-1}} = \sqrt{\frac{23{,}7568}{12-}} = 1{,}4696,$$

$$m(y_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}\delta^2(y_i)}{n-1}} = \sqrt{\frac{19{,}9068}{12-1}} = 1{,}3453.$$

Значення **коефіцієнта кореляції** визначається за формулою

$$r_O = \frac{\sum_{i=1}^{12}\delta(x_i)\cdot\delta(y_i)}{(n-1)\cdot m(x)\cdot m(y)}.$$

А для нульового варіанту коефіцієнт кореляції дорівнюватиме

$$r_O = \frac{\sum_{i=1}^{12}\delta(x_i)\cdot\delta(y_i)}{(n-1)\cdot m(x)\cdot m(y)} = \frac{13{,}8068}{(12-1)\cdot 1{,}4696\cdot 1{,}3453} = 0{,}635\,.$$

Для визначення **контрольного значення коефіцієнта кореляції** вводяться позначення

$$K_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i)\cdot\delta(y_i)}{\sum_{i=1}^{n}\delta^2(x_i)}; \qquad K_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i)\cdot\delta(y_i)}{\sum_{i=1}^{n}\delta^2(y_i)}$$

Для нульового варіанту ці позначення дорівнюватимуть $K_1 = \frac{13{,}8068}{23{,}7568} = 0{,}5812$; $K_2 = \frac{13{,}8068}{19{,}9068} = 0{,}6936$.

Тоді **контрольне значення** знаходиться за формулою

$$|r_o| = \sqrt{K_1 \cdot K_2};$$

або для нульового варіанту $r_o = \sqrt{0{,}5812 \cdot 0{,}6936} = \underline{0{,}635}$.

Отже, коефіцієнт кореляції обчислено **двічі** за традиційними формулами.

Тепер буде представлена нова формула коефіцієнта кореляції, яка дає більш точний результат коефіцієнта, оскільки за традиційною формулою такий коефіцієнт буде дещо заниженим. Для **додатного коефіцієнта кореляції** формула має вигляд

$$r = 1 - \frac{2}{\pi} arctg \frac{1 - K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2},$$

Для нульового варіанту додатній коефіцієнт кореляції дорівнюватиме

$$r = 1 - \frac{2}{\pi} arctg \frac{1 - 0{,}5812 \cdot 0{,}6936}{0{,}5812 + 0{,}6936} = 1 - \frac{2}{\pi} arctg 0{,}468214 = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{25{,}08967^{\circ}}{57{,}29578} = \underline{\underline{0{,}721}}.$$

Як видно, новий коефіцієнт кореляції **збільшений** на 0,721-0,635=**0,086**, що **покращує результати досліджень**.

Коефіцієнт кореляції може знаходитись в інтервалі $-1 \le r \le 1$.

Коли існує від'ємний кореляційний зв'язок і збільшенню однієї із величин відповідає зменшення іншої, тоді знаки коефіцієнтів $\underline{K}_1$ та $\underline{K}_2$ будуть від'ємними. У такому випадку коефіцієнт кореляції визначається за формулою

$$r = -1 - \frac{2}{\pi} arctg \frac{1 - K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}$$

Наприклад, K_1= -0,5694, K_2= -0,4881, тоді коефіцієнт кореляції дорівнюватиме

$$r = -1 - \frac{2}{\pi} arctg \frac{1 - 0{,}5694 \cdot 0{,}4881}{-0{,}5694 - 0{,}4881} = -1 - \frac{2}{\pi} \cdot (-0{,}5991) = -0{,}619 .$$

Нові формули знаходження коефіцієнтів кореляції вивів кандидат технічних наук, доцент Ковтун Микола Танасович.

Завдання до виконання практичної роботи 4. Виконати математичну обробку з метою визначення коефіцієнта кореляції. Порядок обчислень вести згідно приведеному прикладу обчислення коефіцієнтів кореляції в нульовому варіанті. Зробити висновок.

Варіанти студентів для виконання практичної роботи 4

Вихідні дані, що наведені в таблиці 6, тобто відхилення $\delta(x_i)$ та $\delta(y_i)$, потрібно змінити на величини:

– для від'ємних значень (-0,01 $\cdot N$);

– для додатних значень +0,01 $\cdot N$.

де N – порядковий номер студенту по списку в журналі.

Практична робота 5. Визначення функції виміряних величин та оцінка точності функції виміряних величин

Короткі теоретичні відомості.

Оцінка точності функцій виміряних величин

Похибка функції залежить від похибок аргументів, за якими вона обчислена, а також від кореляційного зв'язку між ними, який існує.

Для функції **двох** змінних $y = f(x, y)$ **середня квадратична похибка функції** визначається за формулою:

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + 2r_{xy}m_x m_y \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0} \ .$$

Для функції **трьох** змінних $y = f(x, y, z)$ **середня квадратична похибка функції** виміряних величин дорівнює:

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0^2 m_z^2 + 2r_{xy}m_x m_y \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + 2r_{xz}m_x m_z \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 + +2r_{yz}m_y m_z \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0}$$

Якщо кореляційний зв'язок відсутній, тобто $r_{ij} = 0$, тоді використовують перші три члени, решта членів дорівнюють нулю.

Для незалежних результатів вимірів, коли $r_{ij} = 0$, середня квадратична похибка функції виміряних величин по n аргументах дорівнює

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)_0^2 m_{y_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_{x_n}^2} \ .$$

<u>**Приклад:**</u> $\Delta x = S \cdot \cos\alpha$. Позначити $f = S \cdot \cos\alpha$. Задані m_S, m_α''. Визначити m_f.

$$m_f = \sqrt{\cos^2\alpha \cdot m_S^2 + (-\sin\alpha \cdot S)^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}} = \sqrt{\cos^2\alpha \cdot m_S^2 + S^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}} \ .$$

Вага функції виміряних величин

Задана функція $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Потрібно визначити вагу цієї функції по відомих вагах p_i аргументів x_i. Для цього розділимо дисперсію виміряних величин на величину m_0^2, тоді:

$$\frac{m_y^2}{m_0^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 \cdot \frac{m_{x_1}^2}{m_0^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 \cdot \frac{m_{x_2}^2}{m_0^2} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 \cdot \frac{m_{x_n}^2}{m_0^2} \ .$$

Враховуючи, що $m_{x_i} = \dfrac{m_0}{\sqrt{p_{x_i}}}$ та $p_{x_i} = \dfrac{m_0^2}{m_{x_i}^2}$ маємо:

$$\frac{1}{p_y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_{x_1}} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_{x_2}} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_{x_n}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_{x_i}}$$

Величина $\dfrac{1}{p_{x_i}} = q_{x_i}$ називається оберненою вагою, тоді **обернена вага функції** виміряних величин буде

$$q_y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0^2 \cdot q_{x_i}$$

Розрахунок точності вимірів

При розрахунку точності вимірів аргументів x_i висувається умова, щоб похибка функції не перевищувала наперед заданої допустимої величини $w_{доп}$. Тоді розрахунок точності вимірів зводиться до пошуку **середньої квадратичної похибки функції** m_y, котра задовольняла би нерівності

$$w_{доп} \geq Z_q m_y .$$

Величина Z_q обирається з таблиці нормального розподілу по довірчий ймовірності $p = 1 - q$. Таку нерівність покажемо в такому вигляді

$$\frac{w_{доп}^2}{Z_q^2} \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0^2 m_{x_i}^2 .$$

В даному випадку потрібно розуміти, що змінні x_i попарно некорельовані між собою.

Величини m_{x_i} підбирають на основі досвіду або точностних характеристик приладів. Якщо порушується нерівність, то корегують окремі m_{x_i} в межах реальних можливостей. За рахунок більш доцільного збільшення даних похибок при можливому зменшені інших.

<u>Приклад</u>: Визначити з якою точністю потрібно виміряти вертикальний кут та горизонтальну віддаль при вимірюванні висоти труби з точністю 5 см, яка визначається за формулою

$$h = S \cdot tg\alpha .$$

Задані величини: $\alpha = 20^0$, $S = 300$ *м*, $m_\alpha = 3''$, $m_S = 0{,}10$ *м*. Знаходимо середню квадратичну похибку функції

$$m_h^2 = tg_\alpha^2 \cdot m_S^2 + \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)^2 \cdot S^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} .$$

За умовою допустиме значення $w_{доп} = 5$ *см*, $p = 0{,}95$. $Z_q = 2$.

$$m_h = \sqrt{0{,}364^2 \cdot 100 + \left(\frac{1}{0{,}883} \right)^2 \cdot 30000^2 \cdot \frac{9}{206265^2}} = \sqrt{13{,}25 + 0{,}244} = 3{,}7 \ см.$$

$$\frac{w_{доп}}{Z_q} \geq m_h ; \qquad \frac{w_{доп}}{Z_q} \geq \frac{5см}{2} = 2{,}5см < 3{,}5см .$$

Як бачимо умова не виконується. Встановлюємо $m_S = 5см$. Тоді $m_h = 2{,}0см$.

Знаходимо $\frac{w_{доп}}{2} = 2{,}5см > 2{,}0$.

Таким чином сторону потрібно вимірювати з точністю 5 *см*, кут з точністю $3''$, тоді досягнемо потрібної точності 5 *см* у визначенні висоти труби.

<u>Приклад визначення середньої квадратичної похибки функції:</u> розглянемо для прикладу функцію горизонтального прокладання:

$S = D \cdot \cos\nu$,

де $D = 204{,}155\,м$ – виміряна нахилена віддаль;

$\nu = 2^\circ 17' 45''$ – кут нахилу,

значення середніх квадратичних похибок $m_D = 3мм$ та $m_\nu = 4''$.

Потрібно знайти середню квадратичну похибку функції *S*, яка визначається за першими двома членами попередньої формули, тобто

$$m_s^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial D}\right)_\circ^2 \cdot m_D^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \nu}\right)_\circ^2 \cdot m_\nu^2 = 1 \cdot \cos^2 \nu \cdot m_D^2 + (-\sin\nu)^2 \cdot D^2 \cdot \frac{m_\nu^2}{\rho^2},$$

де $\left(\frac{\partial S}{\partial D}\right)_\circ$; $\left(\frac{\partial S}{\partial \nu}\right)_\circ$ – частинні похідні за аргументами D та ν .

При взятті частинної похідної за кутом ν , середня квадратична похибка якого m_ν виражена в секундах або мінутах, потрібно перейти від градусної міри до абстрагованої величини з розрахунку, що $1''$=0,0000048481366=4,8481366 $\cdot 10^{-6}$ радіана, тобто потрібно похибку m_α помножити на значення

$$4{,}8481366 \cdot 10^{-6} = \frac{4{,}8481366}{1000000} = \frac{1}{1000000 \div 4{,}8481366} = \frac{1}{206264{,}8} = \frac{1''}{\rho''}$$

Підставляючи необхідні величини в останній вираз, будемо мати

$$m_S^2 = \cos^2 2^\circ 17' 45'' \cdot 3^2 + \sin^2 2^\circ 17' 45'' \cdot 204155^2 \cdot \frac{4^2}{206265^2} =$$

$$= 0{,}9984 \cdot 9 + 0{,}0016 \cdot 0{,}9796 \cdot 16 = 9{,}01$$

тоді $m_s = \sqrt{9{,}01} = 3{,}0мм$.

Завдання до виконання практичної роботи 5. Визначити середині квадратичні похибки всіх десяти функцій з таблиці 6 так як наведено в прикладі визначення середньої квадратичної похибки функції.

Вихідні дані для виконання практичної роботи 5 зведені до таблиці 1.6.

Таблиця 1.6

Види функцій та значення аргументів для визначення середніх квадратичних похибок функцій

№ функції	Види функцій	Варіанти Значення аргументів, середні квадратичні похибки, N – номер за списком
1	$Y = K_1 \cdot x_1 + K_2 \cdot x_2$ K_1, K_2 - постійні числа	$K_1 = 2; K_2 = 3; m_{X1} = 2{,}5\text{мм} + 0{,}1 \cdot N\text{мм}$ $m_{X2} = 3\text{мм} + 0{,}1 \cdot N\text{мм}$
2	$\Delta Y = S \cdot \sin \alpha$	S=181,426$м$+0,1 $\cdot N м$; $m_S = 3мм$ $\alpha = 43^\circ 18' 24'' + 1'' \cdot N; m_\alpha = 4{,}5''$
3	$\Delta D = 2D \cdot \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}$	D=192,321$м$+1 $\cdot N м$; $m_D = 5мм$ $\alpha = 5^\circ 13' 27'' + 1'' \cdot N;\ m_\alpha = 4''$
4	$S = h \cdot ctg\alpha$	h=11,043 $м$+10 $\cdot N мм$; $m_h = 1{,}3мм$ $\alpha = 9^\circ 07' 05'' + 1'' \cdot N;\ m_\alpha = 2{,}5''$
5	$f = a \cdot \sin\beta - b \cdot \sin\alpha$	a=174,810$м$+1 $\cdot N м$; $m_a = m_b = 1{,}4мм$ b=205,763$м$+1 $\cdot N м$; $m_\alpha = m_\beta = 1{,}6''$ $\alpha = 36^\circ 18' 13'' + 1'' \cdot N$; $\beta = 54^\circ 12' 19'' + 1'' \cdot N$
6	$P = a \cdot b$	a=150,034$м$+1 $\cdot N м$; $m_a = m_b = 3{,}5мм$ b=180,243$м$+1 $\cdot N м$
7	$Z = \dfrac{h^2}{2l}$	h=3,126+1 $\cdot N мм$; $m_h = 0{,}8мм$ l=237,324 $м$+1 $\cdot N м$; $m_l = 2{,}4мм$
8	$h = d \cdot tg\nu$	d=190,274 $м$+1 $\cdot N м$; $m_d = 3{,}5мм$ $\nu = 7^\circ 11' 23'' + 1'' \cdot N;\ m_\nu = 4''$ Коефіцієнт кореляції r=0,75
9	$V = \dfrac{S^2 \cdot h}{4\pi}$	S=50,014$м$+2 $\cdot N мм$; $m_S = 1{,}7мм$ h=25,040+1 $\cdot N мм$; $m_h = 2{,}6мм$
10	$a = b \cdot \dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta}$	b=541,720$м$+1 $\cdot N м$; $m_b = 3мм$ $\alpha = 59^\circ 14' 07'' + 1'' \cdot N;\ m_\alpha = m_\beta = 4{,}5''$ $\beta = 47^\circ 08' 11'' + 1'' \cdot N$, Примітка: похідна $\left(\dfrac{1}{\sin\beta}\right)' = -\dfrac{\cos\beta}{\sin^2\beta}$

ІІ. Оцінка точності по різницях подвійних вимірювань

В геодезії часто доводиться вимірювати великі групи однорідних величин, при цьому кожну величину для контролю вимірюються двічі.

Практична робота 6. Обробка подвійних рівноточних вимірів однорідних величин.

Короткі теоретичні відомості.

Нехай однорідні величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ виміряні рівноточно двічі і отримано результати вимірювань:

$$x_1', x_2', \ldots, x_n'$$
$$x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$$

Складемо різниці за формулою

$$d_i = x_i' - x_i''. \tag{2.1}$$

Найбільш надійні значення визначальних величин знаходимо за формулою:

$$\overline{x}_i = \frac{x_i' + x_i''}{2}. \tag{2.2}$$

Для оцінки точності використовуємо різниці (2.1).

а) При відсутності систематичних похибок різниці d_i можна розглядати як істинні похибки самих різниць, оскільки істинне значення різниць дорівнює нулю ($\mathrm{M}(d) = 0$).

Застосовуючи до ряду $\{d_i\}$ формулу Гавсса або Бесселя відповідно, знаходимо:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \tag{2.3}$$

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n-1}}. \tag{2.3*}$$

Тоді середня квадратична похибка окремого результату вимірювань буде визначатися за формулою:

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \tag{2.4}$$

Оцінка точності найбільш надійних значень визначається за формулою:

$$m_{\overline{x}} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = 0,5\sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \tag{2.5}$$

б) Якщо в результатах вимірювань присутні систематичні похибки, то величина

$$\mathrm{M}^*(d) = \overline{d} = \frac{[d]}{n} \tag{2.6}$$

Відповідно відрізняється від нуля.

В цьому випадку з кожної різниці необхідно виключити остаточний вплив систематичних похибок, тобто отримати різниці

$$d_i' = d_i - \overline{d}_{\text{окр.}}. \tag{2.7}$$

Розглядаючи різниці d_i' як відхилення від середнього $\overline{d}_{\text{окр.}}$, застосовуючи формулу Бесселя, знаходимо

$$m_d = \sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{n-1}}\,. \qquad (2.8)$$

Середні квадратичні похибки окремого результату вимірювань й найбільш надійні значення виміряних величин знаходимо за формулами

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{2(n-1)}}\,, \qquad (2.9)$$

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = 0{,}5\sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{n-1}}\,. \qquad (2.10)$$

Звернемо увагу, що у цьому випадку необхідно виконати контроль обчислень за формулами

$$\left[d'\right] = -n\,\Delta_{\text{окр.}}\text{, де } \Delta_{\text{окр.}} = \bar{d}_{\text{окр.}} - \bar{d}\,;$$

$$\left[d'^2\right] = \left[d^2\right] - \frac{\left[d\right]^2}{n}\,. \qquad (2.11)$$

Для визначення значущості відхилень $\bar{d}$ від нуля застосовують нерівність

$$\left\|\left[d\right]\right\| \le 1{,}25 t_\beta \frac{\left[|d|\right]}{\sqrt{n}}\,, \qquad (2.12)$$

де t_β обирають з таблиць Стьюдента по заданій ймовірності $\beta = \Phi'(t_\beta)$ і числу ступенів волі $r = n$, а при $n > 30$ коефіцієнт t обирають з таблиць інтегралу ймовірностей по заданій ймовірності $\beta = \Phi(t)$ (Додаток Б). Отже, для $\beta = 0{,}95$ $t = 2$, то нерівність (2.12) приймає вигляд:

$$\left\|\left[d\right]\right\| \le 2{,}5 \frac{\left[|d|\right]}{\sqrt{n}}\,.$$

Іноді застосовують більш жорсткий критерій визначення систематичних похибок

$$\left\|\left[d\right]\right\| \le 0{,}25\left[|d|\right], \qquad (2.13)$$

Який отримано з вимог $\bar{d} = \delta_{\text{сист.}} \le \frac{1}{5} m_d$.

Оцінку точність починають з перевірки умов (2.12) або (2.13). Якщо, наприклад, нерівність (2.13) **виконується**, то роблять висновок про те, що **систематичними похибками можна знехтувати** і оцінку точності варто виконати за формулами (2.4-2.5).

Якщо нерівність (2.13) **не виконується**, роблять заключення про те, що **систематичними похибка нехтувати не можна**, необхідно обробку вести за формулами (2.7, 2.9, 2.10).

Приклад виконання оцінки точності по різницям подвійних вимірювань. Одні й ті ж самі відстані виміряні двічі рівноточно. Необхідно виконати оцінку точності по різницям подвійних вимірювань.

В таблиці 1.7 наведено виміряні відстані і розв’язок нульового варіанту.

Таблиця 1.7

Вихідні дані до прикладу виконання оцінки точності по різницям подвійних вимірювань

№	x_i' (м)	x_i'' (м)	d_i (мм)	d_i^2	d_i'	$d_i'^2$
1	120,389	120,380	+9	81	+6,3	39,7
2	136,468	136,462	+6	36	+3,3	10,9
3	133,223	132,229	–6	36	–8,7	75,7
4	124,536	124,537	–1	1	–3,7	13,7
5	140,457	140,449	+8	64	+5,3	28,1
6	143,682	143,688	–6	36	–8,7	75,7
7	139,158	139,149	+9	81	+6,3	39,7
Σ				335	+0,1	283,5
$\left[(d>0)\right]=+32$ $\left[(d<0)\right]=-13$						
$\left[\lvert d\rvert\right]=45$ $\left[d\right]=+19$						

Розв'язок:

1. Складемо ряд різниць $d_i = x_i' - x_i''$.

2. Згідно критерію виявлення систематичних похибок обчислюємо ліву і праву частини рівності (2.13):

$$\left|\left[d\right]\right| = 19\,;\ 0,25\left[\lvert d\rvert\right] = 0,25\times 45 = 11,2\,.$$

Висновок: ліва частина нерівності (2.13) виявилася більшою його правої частини, відповідно, **систематичними похибками нехтувати не можна**.

3. Знаходимо кінцевий вплив систематичних похибок за формулою (2.6):

$$\bar{d} = \frac{\left[d\right]}{n} = \frac{+19}{7} = +2,71\text{мм}\,;\ \bar{d}_{\text{окр.}} = +2,7\,\text{мм}\,,$$

потім виключаємо його з кожної різниці, знаходимо d_i' та суми $\left[d^2\right]$, $\left[d'\right]$, $\left[d'^2\right]$ безпосередньо в таблиці 1.7 і виконуємо контроль обчислень за формулами (2.11):

1. $\left[d'\right] = -n\,\Delta_{\text{окр.}}$:

$$\Delta_{\text{окр.}} = \bar{d}_{\text{окр.}} - \bar{d} = -0,01\text{мм}\,,$$

$$\left[d'\right] = -7\times(-0,01) \approx +0,1\text{мм}\,;$$

2. $\left[d'^2\right] = \left[d^2\right] - \left[d\right]^2 / n$:

$$\left[d'^2\right] = 335 - 19^2/7 = 283,4\,.$$

Контролі виконано.

4. Знаходимо середню квадратичну похибку одного вимірювання:

$$m_x = \sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{283,5}{12}} = 4,86\text{мм} \approx 4,9\text{мм}\,.$$

5. Визначаємо середню квадратичну похибку найбільш надійних значень виміряних величин:

$$m_{\bar{x}} = 0,5\sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{n-1}} = 3,43\text{мм} \approx 3,4\text{мм}\,.$$

6. Знаходимо відносні середні квадратичні похибки:

$$\frac{m_x}{S_{\text{ср.}}} = \frac{4,9}{134000} = \frac{1}{27000},$$

$$\frac{m_{\bar{x}}}{S_{\text{ср.}}} = \frac{3,4}{134000} = \frac{1}{39000}.$$

Застосування менш жорсткого критерію – нерівність (2.12) – до даної задачі призводить до наступних результатів. Знаходимо для $\beta = \Phi'(t_\beta) = 0,95$ і $r = 7$ (з Додатку Б) $t_\beta = 2,4$. Отримуємо, що

$$\left|[d]\right| = 19\,;\ 1,25 t_\beta \frac{[|d|]}{\sqrt{n}} = 1,25 \times 2,4 \times \frac{45}{\sqrt{7}} = 51\,,$$

тобто ліва частина нерівності (2.12) менше його правої частини, відповідно, з ймовірністю 0,95 **згідно цьому критерію систематичними похибками можна нехтувати** і наступну оцінку точності слід виконувати за формулами (2.4-2.5):

$$m_x = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{335}{14}} = 4,89\text{мм} \approx 4,9\text{мм},\ m_{\bar{x}} = 0,5\sqrt{\frac{[d^2]}{n}} = 3,46\text{мм} \approx 3,5\text{мм}.$$

Як бачимо, величини m_x та $m_{\bar{x}}$ практично не змінилися, але **вплив систематичних похибок** з використанням цього критерію **виявити не вдалося.**

Завдання до виконання практичної роботи 6. В результаті вимірювання перевищень при двох горизонтах приладу на суміжних станціях за умови однакових плеч (відстаней від нівеліру до рейок) отримано результати вимірів. Необхідно виконати оцінку точності за різницями подвійних вимірювань: визначити точність вимірів та оцінити їх надійність. Зробити висновок. Для математичної обробки ряду різниць подвійних рівноточних вимірювань скористатися прикладом виконання оцінки точності подвійних вимірювань. Індивідуальні вихідні дані наведено в Додатку В.

Практична робота 7. Обробка ряду подвійних нерівноточних вимірювань

Короткі теоретичні відомості.

Нехай кожна з однорідних величин X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) виміряна двічі і незалежно, при цьому **вимірювання в кожній парі рівноточні**, а **пари між собою нерівноточні**. Відомо ваги p_i результатів вимірювань. Отримані різниці d_i з вагами $p_{d_i} = p_i/2$.

Найбільш надійні значення виміряних величин знаходять за формулою (2.2).

Критерій виявлення систематичних похибок має вигляд:

$$\left|\left[d\sqrt{p}\right]\right| \le 0,25\left[\left|d\sqrt{p}\right|\right] \qquad (2.14)$$

Якщо нерівність виконується, то роблять висновок про те, що **систематичними похибками можна знехтувати**. Потім знаходять:

1) Середню квадратичну похибку вимірювання з вагою, що дорівнює одиниці,

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}.$$

2) Середні квадратичні похибки найбільш надійних значень

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}.$$

Якщо умова (2.14) не виконується, то необхідно знайти остаточний вплив систематичних похибок

$$\bar{d} = \frac{[pd]}{[p]}$$

і виключити його з кожної різниці. Отримують різниці, вільні від впливу систематичних похибок

$$d'_i = d_i - \bar{d}_{\text{окр.}}.$$

Оцінка точності виконується наступним чином:

1. Визначається середня квадратична похибка вимірювання з вагою, що дорівнює одиниці

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}.$$

2. Обчислюються середні квадратичні похибки найбільш надійних значень

$$m_{x_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}.$$

Завдання до виконання практичної роботи 7. Оцінити точність результатів подвійного нівелювання 10 ходів. Для виконання оцінки використати формули з теоретичного матеріалу даної практичної роботи. Індивідуальні вихідні дані наведено в Додатку Г. В якості вихідних даних для обробки ряду подвійних нерівноточних вимірів дано різниці десяти перевищень d_i з прямого і оберненого ходів нівелювання III класу і довжини відповідних нівелірних ходів L_i. Необхідно виконати оцінку точності результатів подвійного нівелювання 10 ходів і навести висновок.

Список рекомендованих джерел

Войтенко, С. П., Шульц, Р. В., Кузьмич, О. Й., & Кравченко, Ю. В. (2015). *Математичне оброблення геодезичних вимірів: Підручник* (С. П. Войтенко, Ред.). Знання.

Войтенко, С. П. (2003). *Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: Навчальний посібник*. КНУБА.

Зазуляк, П. М., Гавриш, В. І., Євсєєва, Е. М., & Йосипчук, М. Д. (2007). *Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: Навчальний посібник*. „Растр–7".

Ковтун, М. Т., & Малік, Т. М. (2010). Сучасні лінійно-кутові мережі для знесення координат на землю. Збірник наукових праць. *Вісник криворізького технічного університету. Кривий Ріг*, *25*, 76–83.

Ковтун, М. Т., & Малік, Т. М. (2012). *Методичні вказівки до виконання практичних робіт з математичної обробки геодезичних вимірювань ч.1* (с. 14). УНТ.

Літинський, В. (Ред.). (2001). *Геодезичний енциклопедичний словник* (с. 668). Львів: Євросвіт, ДФФД.

Метешкін, К. О., & Шаульський, Д. В. (2012). *Математична обробка геодезичних вимірів: Навчальний посібник* (с. 176). ХНАМГ.

Шебанін, В. С., Шебаніна, О. В., Атаманюк, І. П., Шептилевський, О. В., Цепуріт, О. В., Богданов, С. І., & Бойчук, О. В. (2019). *Математична обробка геодезичних вимірів. Завдання та методичні рекомендації для самостійної роботи здобувачів вищої освіти ступеня „бакалавр" спеціальності 193 „Геодезія та землеустрій" денної форми навчання* (с. 80). МНАУ.

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця значень Z_q

q	0,10	0,05	0,01	0,0027	0,001	0,0001
Z_q	1,64	1,96	2,58	3,00	3,29	3,89

Додаток Б

Коефіцієнти Ст'юдента t_β

r	$\Phi'(t)=\beta$												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,0
3	0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,14	0,28	0,42	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,13	0,27	0,40	0,55	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,13	0,26	0,40	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,13	0,26	0,40	0,54	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
20	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
30	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	**2,0**	2,5	2,8	3,7
60	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	**2,0**	2,4	2,7	3,5
120	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4

Додаток В

Вихідні дні для виконання практичної роботи 6

Варіант 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0.279	-0.092	-0.007	0.025	0.098	0.266	0.324	0.39	0.468	0.503
h2, м	-0.28	-0.089	-0.009	0.028	0.098	0.265	0.32	0.388	0.471	0.505

Варіант 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0.079	0.108	0.193	0.225	0.298	0.466	0.524	0.59	0.668	0.703
h2, м	-0.08	0.111	0.191	0.228	0.298	0.465	0.52	0.588	0.671	0.705

Варіант 3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0.121	0.308	0.393	0.425	0.498	0.666	0.724	0.79	0.868	0.903
h2, м	0.12	0.311	0.391	0.428	0.498	0.665	0.72	0.788	0.871	0.905

Варіант 4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0.321	0.508	0.593	0.625	0.698	0.866	0.924	0.99	1.068	1.103
h2, м	0.32	0.511	0.591	0.628	0.698	0.865	0.92	0.988	1.071	1.105

Варіант 5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0.521	0.708	0.793	0.825	0.898	1.066	1.124	1,19	1.268	1.303
h2, м	0.52	0.711	0.791	0.828	0.898	1.065	1,12	1.188	1.271	1.305

Варіант 6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0.721	0.908	0.993	1.025	1.098	1.266	1.324	1,39	1.468	1.503
h2, м	0.72	0.911	0.991	1.028	1.098	1.265	1,32	1.388	1.471	1.505

Варіант 7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,921	1,108	1,193	1,225	1,298	1,466	1,524	1,598	1,668	1,703
h2, м	0,92	1,111	1,191	1,228	1,298	1,465	1,52	1,588	1,671	1,705

Варіант 8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,121	1,308	1,393	1,425	1,498	1,666	1,724	1,79	1,868	1,903
h2, м	1,12	1,311	1,391	1,428	1,498	1,665	1,72	1,788	1,871	1,905

Варіант 9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,321	1,508	1,593	1,625	1,698	1,866	1,924	1,99	2,068	2,103
h2, м	1,32	1,511	1,591	1,628	1,698	1,865	1,92	1,988	2,071	2,105

Варіант 10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1.521	1.708	1.793	1.825	1.898	2.066	2.124	2.190	2.268	2.303
h2, м	1.152	1.711	1.791	1.828	1.898	2.065	2.12	2.188	2.271	2.305

Варіант 11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0.279	-0.092	-0.007	-0025	0.098	0.266	0.324	0.39	0.468	0.503
h2, м	-0.28	-0.089	-0.009	0.028	0.098	0.265	0.32	0.388	0.471	0.505

Варіант 12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0.079	0.108	0.193	0.225	0.298	0.466	0.524	0.59	0.668	0.703
h2, м	-0.08	0.111	0.191	0.228	0.298	0.465	0.52	0.588	0.671	0.705

Варіант 13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0.121	0.308	0.393	0.425	0.498	0.666	0.724	0.79	0.868	0.903
h2, м	0.12	0.311	0.391	0.428	0.498	0.665	0.72	0.788	0.871	0.905

В14.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,321	0,508	0,593	0,625	0,698	0,866	0,924	0,99	1,068	1,103
h2, м	0,32	0,511	0,591	0,628	0,698	0,865	0,92	0,988	1,071	1,105

В15.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,521	0,708	0,793	0,825	0,898	1,066	1,124	1,19	1,268	1,303
h2, м	0,52	0,711	0,791	0,828	0,898	1,065	1,12	1,188	1,271	1,305

В16.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,721	0,908	0,993	1,025	1,098	1,266	1,324	1,39	1,468	1,503
h2, м	0,72	0,911	0,991	1,028	1,098	1,265	1,32	1,388	1,471	1,505

В17.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,921	1,108	1,193	1,225	1,298	1,466	1,524	1,59	1,668	1,703
h2, м	0,92	1,111	1,191	1,228	1,298	1,465	1,52	1,588	1,671	1,705

В18.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,121	1,308	1,393	1,425	1,498	1,666	1,724	1,79	1,868	1,903
h2, м	1,12	1,311	1,391	1,428	1,498	1,665	1,72	1,788	1,871	1,905

В19.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,321	1,508	1,593	1,625	1,698	1,866	1,924	1,99	2,068	2,103
h2, м	1,32	1,511	1,591	1,628	1,698	1,865	1,92	1,988	2,071	2,105

В20.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,521	1,708	1,793	1,825	1,898	2,066	2,124	2,19	2,268	2,303
h2, м	1,52	1,711	1,791	1,828	1,898	2,065	2,12	2,188	2,271	2,305

Додаток Г

Вихідні дні для виконання практичної роботи 7

B1.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	35,5	53,3	37,4	-23,7	-9,5	58,3	41,6	-3,6	-45,6	23,7
L, км	3,6	7,6	4,9	9,7	3,7	4,8	3,4	2,4	3,5	7,1

B2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	21,5	23,6	-5,7	-45,3	23,8	34,7	32,6	-23,7	65,7	23,8
L, км	2,1	3,5	3,2	4,7	1,5	7,5	4,7	3,8	2,5	7,4

B3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	42,7	21,9	34,9	-12,9	23,8	32,9	-5,9	32,7	57	23,9
L, км	7,4	6,4	3,8	3,9	4,7	2,1	4,6	3,8	2,7	6,5

B4

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	32,2	22,5	43,2	23,8	45,8	43,7	34,8	21,4	12,6	14,5
L, км	2,3	4,3	1,6	2,7	4,5	3,8	5,3	4,9	35	1,7

B5

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	17,8	23,6	-21,9	34,8	56,8	-23,7	21,7	-13,7	32,7	34,7
L, км	3,3	3,5	2,4	2,7	4,3	5,2	5,5	4,6	3,7	2,1

B6

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	23,3	21,3	-32,5	29,6	43,7	32,7	21,8	-32,6	23,5	32,1
L, км	2,1	3,6	4,6	3,2	3,4	2,7	3,4	2,8	3,7	4,9

B7

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	33,4	-23,7	78,4	32,6	46,3	37,8	-74,5	54,6	-55,4	34
L, км	4,6	3,4	2,3	4,2	1,8	6,7	8,3	5,5	3,7	4,8

B8

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	-45,8	-23,7	42,9	34,7	45,4	23,8	47,7	-65,8	87,6	34,8
L, км	2,3	2,5	6,3	4,4	4,7	3,2	3,9	1,7	4,2	3,6

B9

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	33,8	24,7	21,8	-41,9	45,4	27,2	-17,9	-21,3	54,9	32,8
L, км	1,7	3,7	4,4	2,4	3,6	2,7	5,1	2,4	3	2,2

B11.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	35,5	53,3	37,4	-23,7	-9,5	58,3	41,6	-3,6	-45,6	23,7
L, км	3,6	7,6	4,9	9,7	3,7	4,8	3,4	2,4	3,5	7,1

B12

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	21,5	23,6	-5,7	-45,3	23,8	34,7	32,6	-23,7	65,7	23,8
L, км	2,1	3,5	3,2	4,7	1,5	7,5	4,7	3,8	2,5	7,4

B13

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	42,7	21,9	34,9	-12,9	23,8	32,9	-5,9	32,7	57	23,9
L, км	7,4	6,4	3,8	3,9	4,7	2,1	4,6	3,8	2,7	6,5

B14

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	32,2	22,5	43,2	23,8	45,8	43,7	34,8	21,4	12,6	14,5
L, км	2,3	4,3	1,6	2,7	4,5	3,8	5,3	4,9	35	1,7

B15

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	17,8	23,6	-21,9	34,8	56,8	-23,7	21,7	-13,7	32,7	34,7
L, км	3,3	3,5	2,4	2,7	4,3	5,2	5,5	4,6	3,7	2,1

B16

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	23,3	21,3	-32,5	29,6	43,7	32,7	21,8	-32,6	23,5	32,1
L, км	2,1	3,6	4,6	3,2	3,4	2,7	3,4	2,8	3,7	4,9

B17

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	33,4	-23,7	78,4	32,6	46,3	37,8	-74,5	54,6	-55,4	34
L, км	4,6	3,4	2,3	4,2	1,8	6,7	8,3	5,5	3,7	4,8

B18

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	-45,8	-23,7	42,9	34,7	45,4	23,8	47,7	-65,8	87,6	34,8
L, км	2,3	2,5	6,3	4,4	4,7	3,2	3,9	1,7	4,2	3,6

B19

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	33,8	24,7	21,8	-41,9	45,4	27,2	-17,9	-21,3	54,9	32,8
L, км	1,7	3,7	4,4	2,4	3,6	2,7	5,1	2,4	3	2,2

B20

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	32,2	23,5	44,1	22,7	14,6	47,9	12,6	13,4	17,8	43,2
L, км	2,1	2,8	3,3	2,5	1,7	3,7	2,8	3,1	3,3	2,5